

Estimation rapide du paramètre de régularisation en déconvolution d'images

André Jalobeanu, Laure Blanc-Féraud, Josiane Zerubia

Projet Ariana (projet commun CNRS/INRIA/UNSA) - INRIA Sophia Antipolis

e-mail : {andre.jalobeanu, laure.blanc_feraud, josiane.zerubia}@inria.fr

Mots clés :

estimation, déconvolution, régularisation, modèle gaussien, vraisemblance, image satellitaire

Résumé

La déconvolution des images satellitaires floues et bruitées est un problème inverse mal posé, qui peut être régularisé dans un cadre bayésien par l'utilisation d'un modèle a priori de la solution reconstruite. Des modèles basés sur une fonctionnelle de régularisation non quadratique ont été utilisés avec succès afin de restaurer des images exemptes de bruit tout en préservant les contours. Toutefois, ces modèles présentent des paramètres, dont la valeur influe très fortement sur la qualité de la solution obtenue. Nous avons déjà proposé une technique d'estimation de ces paramètres, toujours dans un cadre bayésien, qui donne de bons résultats mais qui nécessite un temps de calcul important, car il s'agit d'une méthode stochastique.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode d'estimation du paramètre de régularisation, fondée sur une approximation gaussienne. Cette technique présente l'avantage d'être déterministe. De cette manière, l'estimation est rendue particulièrement rapide, quelle que soit la taille de l'image que l'on cherche à déconvoluer, car elle ne nécessite qu'une FFT et quelques opérations par pixel.

L'estimateur que nous avons utilisé est le maximum de vraisemblance (MV) en données complètes. La technique proposée consiste à approcher les distributions a priori et a posteriori par une loi gaussienne, ce qui rend les fonctions de normalisation relatives à ces lois calculables analytiquement. Le paramètre estimé de cette manière correspond à une régularisation quadratique (qui ne préserve pas les contours), il est donc réajusté en conséquence afin de permettre l'utilisation d'une fonctionnelle non quadratique lors de la déconvolution. Les images déconvoluées de cette manière peuvent être utilisées telles quelles, lorsque la dégradation n'est pas trop importante. Elles peuvent également servir à l'estimation des paramètres adaptatifs dans un algorithme travaillant dans une base d'ondelettes, car elles présentent des bords francs et un bruit résiduel suffisamment faible.

1 Introduction

Le problème présenté ici est la reconstruction d'une image satellitaire à partir d'une observation floue et bruitée.

Le modèle d'observation est représenté par l'équation suivante :

$$Y = H\mathcal{X} + N \quad \text{où} \quad H\mathcal{X} = h \star \mathcal{X} \quad (1)$$

où Y est l'image observée, et \mathcal{X} l'image originale. Le vecteur N désigne un bruit additif supposé blanc, gaussien et stationnaire. L'opérateur H représente la convolution par le noyau h . La réponse impulsionnelle h est positive, et vérifie la propriété de Shannon.

Nous nous intéressons ici à un problème réel de déconvolution d'image satellitaire, proposé par le CNES. Il s'agit de traiter des simulations du futur satellite SPOT 5. Les images originale et observée sont fournies (l'image originale à titre de comparaison). L'écart-type du bruit σ et le noyau h sont parfaitement connus ($\sigma = 1.35$ pour l'exemple présenté sur la figure 2, cf. figure 1 pour h). La validation de la méthode proposée est réalisée sur des images nettes dégradées par des opérateurs connus, cependant elle a été développée pour être appliquée à des observations réelles que l'on cherche à restaurer.

2 Régularisation d'un problème inverse mal posé

Le problème de la déconvolution en présence de bruit est mal posé au sens d'Hadamard. La connaissance du modèle de dégradation ci-dessus est insuffisante pour obtenir des résultats satisfaisants. Il est alors nécessaire de régulariser la solution par l'introduction de contraintes a priori [3, 6, 9]. Lorsque le noyau de convolution et les statistiques du bruit sont connus, calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance (solution non régularisée) consiste à minimiser une énergie. La contrainte de régularisation s'exprime au travers d'un terme qui vient s'ajouter à cette énergie, et qui représente une pénalité, une contrainte de douceur sur la solution à restaurer.

Cette fonction pourrait être quadratique (comme suggéré par Tikhonov dans [15]) en supposant que les images sont globalement lisses, mais cela a pour effet de sur-régulariser le problème en fournissant des images encore trop floues. Un modèle d'image plus efficace est construit en supposant que les images sont lisses dans les zones homogènes, et que les contours doivent rester nets. Pour obtenir cette régularisation avec préservation des contours, nous avons utilisé une φ -fonction non quadratique dans [11], appelée fonction de potentiel, introduite auparavant dans [7] et [5]. Les propriétés des φ -fonctions ont été étudiées dans un cadre variationnel pour préserver les discontinuités tout en interdisant l'amplification du bruit. Ces fonctions sont symétriques, positives, croissantes sur \mathbb{R}^+ , elles sont quadratiques près de l'origine et ont une forme linéaire ou sous-linéaire en $\pm\infty$ pour préserver les contours.

La solution régularisée est calculée en minimisant l'énergie suivante :

$$U(X) = \|Y - HX\|^2 / 2\sigma^2 + \lambda\Phi(X) \quad (2)$$

$$\text{où} \quad \Phi(X) = \sum_{ij} \left\{ \varphi \left(\frac{(D_x X)_{ij}}{\delta} \right) + \varphi \left(\frac{(D_y X)_{ij}}{\delta} \right) \right\} \quad (3)$$

et où D_x et D_y sont les opérateurs de dérivation (différences de pixels voisins) par rapport aux colonnes et aux lignes. Les réels λ et δ sont les *paramètres* du modèle de régularisation.

Cela correspond à l'estimateur du Maximum A Posteriori (MAP). La contrainte de régularisation peut être exprimée comme la distribution a priori de l'image inconnue, en considérant que cette image peut être modélisée par un champ de Markov [2, 9] :

$$P(X | \lambda) = Z_\lambda^{-1} e^{-\lambda\Phi(X)} \quad (4)$$

alors que le terme $\|Y - HX\|^2/2\sigma^2$ correspond à la vraisemblance de X par rapport aux statistiques du bruit gaussien stationnaire :

$$P(Y | X) = K^{-1} e^{-\|Y - HX\|^2/2\sigma^2} \quad (5)$$

L'énergie $U(X)$ est minimisée dans un cadre variationnel, afin de conserver un algorithme rapide. Cela est équivalent à maximiser la probabilité a posteriori de l'image X , dans une approche stochastique [10]. La distribution a posteriori est donnée par l'équation suivante en utilisant la règle de Bayes :

$$P(X | Y, \lambda) = Z_{Y, \lambda}^{-1} e^{-\|Y - HX\|^2/2\sigma^2 - \lambda\Phi(X)} \quad (6)$$

Nous avons utilisé la fonction $\varphi(u) = 2\sqrt{1 + u^2} - 2$ car alors la solution est unique (cette fonction est convexe). Dans ce cas, nous utilisons un algorithme déterministe pour la déconvolution [4, 11].

3 Estimation du paramètre par une méthode MCMC

La qualité visuelle de l'image déconvoluée est très sensible à la valeur des paramètres (λ, δ) , donc ces paramètres doivent être déterminés avec précision, ce qui exclut une estimation empirique. Le paramètre λ représente le poids de la régularisation par rapport au terme d'attache aux données. Des valeurs trop élevées conduisent à des solutions trop lisses, alors que des valeurs trop basses fournissent des images trop bruitées. Le paramètre δ constitue un seuil en-dessous duquel les gradients (dus au bruit) sont lissés, et au-dessus duquel ils sont préservés car ils sont supposés correspondre à des contours. Nous ne nous intéresserons pas ici à l'estimation automatique de ce paramètre, car nous avons montré précédemment que le fait de chercher à estimer en même temps λ et δ pose des problèmes d'unicité [11]. Comme δ est essentiellement lié au niveau de bruit, nous utiliserons une valeur proche de 5σ donnant de bons résultats dans la plupart des cas. Ce paramètre règle en fait la forme de la fonction de régularisation (des valeurs très grandes correspondent à une régularisation quadratique alors que de faibles valeurs permettent d'avoir une régularisation à variation totale). Nous nous intéressons ici à λ , qui règle l'intensité de la régularisation, et que nous cherchons à estimer pour une valeur de δ donnée.

Nous avons utilisé précédemment une méthode d'estimation stochastique [11] utilisant une approche Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC), fondée sur l'estimateur du *Maximum de Vraisemblance* (MV). Cet estimateur est calculé en utilisant la probabilité de l'image observée sachant le paramètre λ :

$$(\hat{\lambda}) = \arg \max_{\lambda} P(Y | \lambda) \quad (7)$$

Pour calculer (7), la loi jointe $P(X, Y)$ est intégrée sur X . Ensuite, la règle de Bayes est utilisée pour faire apparaître la vraisemblance et la loi a priori de X :

$$P(Y | \lambda) = \int_{\Omega} P(Y | X) P(X | \lambda) dX \quad (8)$$

ce qui mène à $P(Y | \lambda) = Z_{Y, \lambda} / Z_{\lambda} K$, où Z_{λ} , $Z_{Y, \lambda}$ et K sont respectivement les fonctions de partition relatives aux lois a priori (4), a posteriori (6) et à la vraisemblance de X . Il est impossible de calculer analytiquement ces fonctions lorsque la fonction φ n'est pas quadratique. Dans [11] nous avons optimisé la vraisemblance sans calculer explicitement Z_{λ} and $Z_{Y, \lambda}$, mais en estimant leurs dérivées par rapport au paramètre λ :

$$\frac{\partial \log P(Y | \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \log Z_{Y,\lambda}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \log Z_\lambda}{\partial \lambda} \quad (9)$$

$$\text{où } \frac{\partial \log Z_\lambda}{\partial \lambda} = -E_\lambda \left[\frac{\partial U(X)}{\partial \lambda} \right] = -E_\lambda [\Phi(X)] \quad (10)$$

$$\text{et } \frac{\partial \log Z_{Y,\lambda}}{\partial \lambda} = -E_{Y,\lambda} \left[\frac{\partial U(X)}{\partial \lambda} \right] = -E_{Y,\lambda} [\Phi(X)] \quad (11)$$

où E_λ et $E_{Y,\lambda}$ sont respectivement les espérances par rapport aux lois a priori et a posteriori. Ces espérances sont approchées par des moyennes empiriques calculées sur n échantillons (images tirées avec les bonnes lois de probabilité). Nous avons alors :

$$E_\lambda [\Phi(X)] \simeq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(X_k \sim P(X)) \quad \text{et} \quad E_{Y,\lambda} [\Phi(X)] \simeq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(X_k \sim P(X | Y)) \quad (12)$$

L'échantillonnage par rapport aux différentes distributions est effectué en utilisant un échantillonneur de Geman et Yang modifié [8, 11].

Pour accélérer l'algorithme d'optimisation de la "log-vraisemblance", il est possible d'estimer les paramètres de régularisation en utilisant une technique fondée sur les méthodes de type EM (*Expectation Maximization*) [14]. Le principe de l'EM consiste à maximiser l'espérance de la probabilité jointe de X et Y , prise selon la loi a posteriori :

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} E_{Y,\lambda} [\log P(X, Y | \lambda)]$$

En pratique, la recherche de paramètres optimaux selon ce critère est très difficile, c'est pourquoi nous utilisons une forme itérative, plus simple à mettre en œuvre, et pour laquelle des preuves de convergence existent [1, 14], à condition que la fonction de vraisemblance soit concave.

L'étape **E** (espérance) consiste à calculer la fonction $Q(\lambda, \hat{\lambda}^n)$, fonction de λ , étant donné le paramètre $\hat{\lambda}^n$ estimé à l'itération n :

$$Q(\lambda, \hat{\lambda}^n) = E_{Y, \hat{\lambda}^n} [\log P(X, Y | \lambda)]$$

L'étape **M** (maximisation) consiste à calculer la valeur de λ qui maximise $Q(\lambda, \hat{\lambda}^n)$:

$$\hat{\lambda}^{n+1} = \arg \max_{\lambda} E_{Y, \hat{\lambda}^n} [\log P(X, Y | \lambda)]$$

En dérivant cette expression par rapport à λ , on obtient finalement :

$$E_{\hat{\lambda}^{n+1}} \left[\frac{\partial U(X)}{\partial \lambda} \right] = E_{Y, \hat{\lambda}^n} \left[\frac{\partial U(X)}{\partial \lambda} \right]$$

ce qui s'écrit :

$$E_{\hat{\lambda}^{n+1}} [\Phi(X)] = E_{Y, \hat{\lambda}^n} [\Phi(X)] \quad (13)$$

Il s'agit d'attribuer une nouvelle valeur aux paramètres, ce qui consiste à maximiser la vraisemblance en données complètes, alors que la méthode habituelle consiste à descendre d'un pas dans la direction du gradient, ce qui est en général moins rapide, et la stabilité est moindre.

On distingue donc deux étapes dans une méthode de type EM : le calcul de l'espérance a posteriori avec $\hat{\lambda}^n$, puis la maximisation, c'est-à-dire la recherche des nouvelles valeurs des paramètres $\hat{\lambda}^{n+1}$ telles que l'espérance a priori soit égale à l'espérance a posteriori, qui est une constante calculée lors de l'étape précédente.

Supposons que l'on connaisse l'expression de l'espérance a priori $E_\lambda[\Phi(X)]$ en fonction de λ , que l'on notera $\mathcal{E}_\lambda(\lambda)$. L'étape de maximisation devient alors très rapide, en utilisant la fonction réciproque \mathcal{E}_λ^{-1} :

$$\hat{\lambda}^{n+1} = \mathcal{E}_\lambda^{-1} \left(E_{Y, \hat{\lambda}^n}[\Phi(X)] \right)$$

Il est possible de calculer numériquement (en utilisant des échantillonneurs), pour un ensemble de valeurs discrètes de λ , l'espérance $\mathcal{E}_\lambda(\lambda)$. Ensuite, la réciproque est déterminée puis stockée dans un tableau, qui pourra être utilisé pour optimiser l'estimation, sans qu'il soit nécessaire de recalculer les espérances par une méthode MCMC.

Nous pouvons déterminer expérimentalement (à partir d'une courbe tracée avec une échelle logarithmique) une approximation analytique de la fonction réciproque \mathcal{E}_λ^{-1} :

$$\mathcal{E}_\lambda^{-1}(E_\lambda) \simeq 0.6 E_\lambda^{-0.91}$$

3.1 Algorithme d'estimation MCMC

Initialisation: $\delta \simeq 5\sigma$ et $\lambda/\delta \simeq 10^{-2}$.

Répéter jusqu'à la convergence :

- Calculer l'image restaurée \hat{X} en minimisant $U(X)$ selon l'équation (2) avec λ^n .
- Calculer $E_{Y, \lambda^n}[\cdot]$ avec λ^n : générer une chaîne de Markov, ensuite évaluer l'espérance par une moyenne empirique.
- Mise à jour de λ : $\lambda^{n+1} = \mathcal{E}_\lambda^{-1} (E_{Y, \lambda^n}[\Phi(X)])$
- Critère d'arrêt : on suppose que la convergence est atteinte lorsque $\frac{|\lambda^{n+1} - \lambda^n|}{\lambda^n} < \epsilon$.

4 Estimation pour un modèle gaussien

Si nous utilisons un modèle quadratique (*i.e.* $\varphi(u) = u^2$), la solution est sur-régularisée, les contours n'étant plus préservés (voir figure 2). Cependant, il est utile d'estimer le paramètre de régularisation correspondant, noté b , car cela ne nécessite aucune technique stochastique, et l'algorithme devient alors particulièrement rapide. Nous verrons au paragraphe suivant que l'on peut ensuite trouver le paramètre λ d'un modèle non quadratique, de manière approchée, en utilisant la valeur de b estimée par l'algorithme rapide que nous allons détailler ci-dessous.

Le modèle quadratique est le suivant :

$$\Phi_g(X) = \sum_{ij} \{ (D_x X)_{ij}^2 + (D_y X)_{ij}^2 \} \quad (14)$$

où b est le paramètre à estimer. Comparé aux modèles non quadratiques, un tel modèle a l'avantage de présenter des distributions a priori et a posteriori gaussiennes :

$$\begin{aligned} P(X) &= Z_b^{-1} e^{-b(\|D_x X\|^2 + \|D_y X\|^2)} \\ P(X | Y) &= Z_{Y,b}^{-1} e^{-\|Y - HX\|^2 / 2\sigma^2 - b(\|D_x X\|^2 + \|D_y X\|^2)} \end{aligned} \quad (15)$$

Les fonctions Z_b et $Z_{Y,b}$ peuvent alors être calculées analytiquement. Les matrices de covariance respectives sont données par les formes quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma_b^{-1} &= 2b(D_x^t D_x + D_y^t D_y) \\ \Sigma_{Y,b}^{-1} &= H^t H / \sigma^2 + 2b(D_x^t D_x + D_y^t D_y) \end{aligned}$$

4.1 Calcul des espérances

4.1.1 Distribution a priori

On suppose que les images sont de taille $N_x \times N_y$ pixels.

La fonction de partition de la distribution a priori est :

$$Z_b = \int_{\Omega} e^{-b(\|D_x X\|^2 + \|D_y X\|^2)} dX = \int_{\Omega} e^{-\frac{1}{2} X^t \Sigma_b^{-1} X} dX = 2\kappa \sqrt{\frac{(2\pi)^{N_x N_y - 1}}{\det' \Sigma_b^{-1}}}$$

La matrice de covariance Σ_b est diagonalisée par une transformée de Fourier, car son inverse ne fait intervenir que des opérateurs circulants par blocs (opérateurs de dérivation). Nous intégrons par rapport aux variables transformées (dans l'espace de Fourier). L'expression notée \det' est le produit de toutes les valeurs propres non nulles ($N_x N_y - 1$). Seule la première valeur propre est nulle. Cela correspond au vecteur propre défini par la somme des pixels (fréquence 0). Ceci détermine le choix de l'espace des configurations Ω :

$$\Omega = \mathbb{R}^{N_x N_y} \cap \left\{ -\kappa \leq \sum_{i,j} x_{ij} \leq \kappa \right\}$$

Cet espace est construit en prenant tous les points situés entre les deux hyperplans définis par $\sum_{i,j} x_{ij} = \pm \kappa$. Cela évite à la distribution a priori d'être impropre, et cela permet également à l'intégrale ci-dessus d'être proportionnelle à la constante κ . Cette borne κ est prise suffisamment grande pour permettre à une image satellitaire d'appartenir à l'espace Ω , et reste fixée par la suite.

On note $\mathcal{F}[\]$ la transformée de Fourier discrète, on a alors :

$$\det' \Sigma_b^{-1} = \prod_{(i,j) \neq (0,0)} 2b c_{ij} \quad \text{où} \quad c_{ij} = |\mathcal{F}[D_x]|_{ij}^2 + |\mathcal{F}[D_y]|_{ij}^2$$

On obtient finalement :

$$E_b [\Phi(X)] = -\frac{\partial \log Z_b}{\partial b} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{1}{b} = \frac{N_x N_y}{2b} \quad (16)$$

4.1.2 Distribution a posteriori

De la même manière, nous pouvons calculer exactement $Z_{Y,b}$:

$$Z_{Y,b} = \int_{\Omega} e^{-U(X)} dX = \int_{\Omega} e^{-\|Y - HX\|^2 / 2\sigma^2 - b(\|D_x X\|^2 + \|D_y X\|^2)} dX$$

Nous introduisons ici \hat{X} , l'optimum de la forme quadratique $U(X)$. Cela permet de mettre les termes constants en-dehors de l'intégrale :

$$Z_{Y,b} = e^{-U(\hat{X})} \int_{\Omega} e^{-\frac{1}{2}(X - \hat{X})^t \Sigma_{Y,b}^{-1} (X - \hat{X})} dX \simeq e^{-U(\hat{X})} \sqrt{\frac{(2\pi)^{N_x N_y}}{\det \Sigma_{Y,b}^{-1}}}$$

L'intégration est effectuée en diagonalisant la forme quadratique dans l'espace de Fourier. Toutes les variables transformées sont intégrées sur \mathbb{R} , exceptée la première qui est intégrée sur $[-\kappa, \kappa]$. Ainsi, l'approximation reste suffisamment précise, car κ est suffisamment grand.

Si l'on note $w_{ij} = |\mathcal{F}[h]|_{ij}^2 / 2\sigma^2$, alors on obtient :

$$\det \Sigma_{Y,b}^{-1} = \prod_{i,j} 2 (bc_{ij} + w_{ij})$$

Calculons maintenant $U(\hat{X})$ où \hat{X} est l'image restaurée avec une régularisation quadratique :

$$\mathcal{F}[\hat{X}] = \frac{\mathcal{F}[h]^* \mathcal{F}[Y]}{2\sigma^2(bc + w)} \quad (17)$$

L'énergie U est donnée par :

$$U(\hat{X}) = \sum_{i,j} \left(|\mathcal{F}[Y]_{ij} - \mathcal{F}[h]\mathcal{F}[\hat{X}]_{ij}|^2 / 2\sigma^2 + b (|\mathcal{F}[d_x]\mathcal{F}[\hat{X}]_{ij}|^2 + |\mathcal{F}[d_y]\mathcal{F}[\hat{X}]_{ij}|^2) \right)$$

Nous obtenons :

$$U(\hat{X}) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\|Y\|^2 - \sum_{i,j} \frac{w_{ij} |\mathcal{F}[Y]_{ij}|^2}{bc_{ij} + w_{ij}} \right)$$

et la fonction de partition cherchée s'écrit :

$$Z_{Y,b} \propto e^{-U(\hat{X})} \sqrt{\prod_{i,j} \frac{1}{bc_{ij} + w_{ij}}}$$

$$\log Z_{Y,b} = \sum_{i,j} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{bc_{ij} + w_{ij}} \right) + \frac{w_{ij} |\mathcal{F}[Y]_{ij}|^2}{2\sigma^2 (bc_{ij} + w_{ij})} \right] + cste. \quad (18)$$

L'espérance cherchée est finalement :

$$E_{Y,b}[\Phi(X)] = -\frac{\partial \log Z_{Y,b}}{\partial b} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{c_{ij}}{bc_{ij} + w_{ij}} + \frac{c_{ij} w_{ij} |\mathcal{F}[Y]_{ij}|^2}{\sigma^2 (bc_{ij} + w_{ij})^2} \right) \quad (19)$$

Ainsi, cette méthode est déterministe, bien que faisant appel à un calcul de probabilités. Nous pouvons utiliser des quantités précalculées (comme la transformée de Fourier de l'image observée) afin de réduire au minimum le temps de calcul. Le seul facteur limitant reste l'algorithme de déconvolution avec préservation des contours, une fois que le paramètre a été estimé.

4.2 Algorithme d'estimation

Initialisation : $b \simeq 10^{-3}$.

Répéter jusqu'à la convergence :

- Calculer l'espérance $E_{Y,b}[\Phi(X)]$ avec b^n en utilisant l'équation (19).
- Mise à jour de b : $b^{n+1} = \frac{N_x N_y}{2E_{Y,b}[\Phi(X)]}$
- Critère d'arrêt : on suppose que la convergence est atteinte lorsque $\frac{|b^{n+1} - b^n|}{b^n} < \epsilon$.

5 Une approximation gaussienne

Nous pouvons optimiser de manière significative la vitesse de l'algorithme d'estimation MCMC vu au paragraphe 3.1 en approchant les lois a priori et a posteriori lorsque la fonction φ n'est pas quadratique, par des distributions gaussiennes bien choisies. En étudiant le comportement de la fonction $e^{-\lambda\varphi(u/\delta)}$, où u est une différence entre pixels voisins (gradient), nous remarquons que l'on peut utiliser l'approximation e^{-bu^2} , noyau gaussien dont la variance $\frac{1}{2b^2}$ dépend des valeurs de λ et δ . Le paramètre b est évalué par des études numériques.

Plusieurs méthodes sont disponibles pour calculer b , par exemple l'intégrale ou la variance des fonctions $e^{-\lambda\varphi(u/\delta)}$ et e^{-bu^2} sont contraintes à être égales. Nous proposons d'utiliser le résultat suivant, fondé sur une étude numérique, qui donne $K \simeq 6$ [12] :

$$b = \frac{\lambda}{\delta^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{K\lambda}} \right) \quad (20)$$

L'optimisation proposée peut se décomposer en trois étapes :

- estimation du paramètre b pour le modèle quadratique ;
- transformation de b en λ en inversant l'équation (20), avec $\delta = 5\sigma$;
- déconvolution de l'image observée avec les paramètres (λ, δ) et une fonction φ *non quadratique*.

Les images reconstruites de cette manière sont très satisfaisantes (voir figure 2). Pour vérifier la pertinence des paramètres ainsi estimés, nous avons comparé les résultats de la déconvolution avec des paramètres estimés suivant la technique originale (paragraphe 3.1) et la nouvelle technique approchée (paragraphe 4.2). Le rapport signal/bruit de la solution est au maximum 0.1 dB plus bas (0.5%) avec la technique approchée qu'en utilisant la méthode MCMC. Le temps de calcul relatif à l'estimation approchée est négligeable par rapport à l'estimation MCMC.

La complexité de l'algorithme d'estimation est donnée par les FFT nécessaires au calcul de $|\mathcal{F}[Y]_{ij}|^2$ et de w_{ij} dans la somme (19). Une fois ces FFT calculées, les étapes de l'estimation sont de complexité $O(N_x N_y)$, et le faible nombre d'itérations nécessaire (entre 5 et 8) justifie l'appellation "rapide" de cette méthode.

6 Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une nouvelle méthode d'estimation du paramètre de régularisation pour la déconvolution d'images. L'estimateur du maximum de vraisemblance avait déjà fait ses preuves en permettant de résoudre le problème lorsque l'estimation était effectuée à partir de petites zones de l'image observée, par une méthode stochastique. La nouvelle technique présentée ici est déterministe. Elle permet un gain de vitesse considérable, en évitant l'utilisation d'échantillonneurs, tout en conservant l'approche bayésienne des problèmes de déconvolution et d'estimation. En approchant les distributions de probabilité par des distributions gaussiennes, il est possible d'obtenir une valeur pertinente du paramètre de régularisation, sans que cela pénalise la qualité des images déconvoluées. Le résultat peut être utilisé tel quel, mais aussi dans un algorithme tel que COWPATH, détaillé dans [13], fondé sur une décomposition en paquets d'ondelettes complexes, comblant ainsi le manque de localisation spatiale des ondelettes par la netteté des contours obtenus.

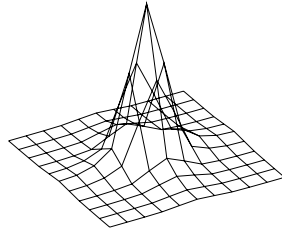


FIG. 1 – Réponse impulsionnelle h (seule une zone 11×11 non nulle est représentée).

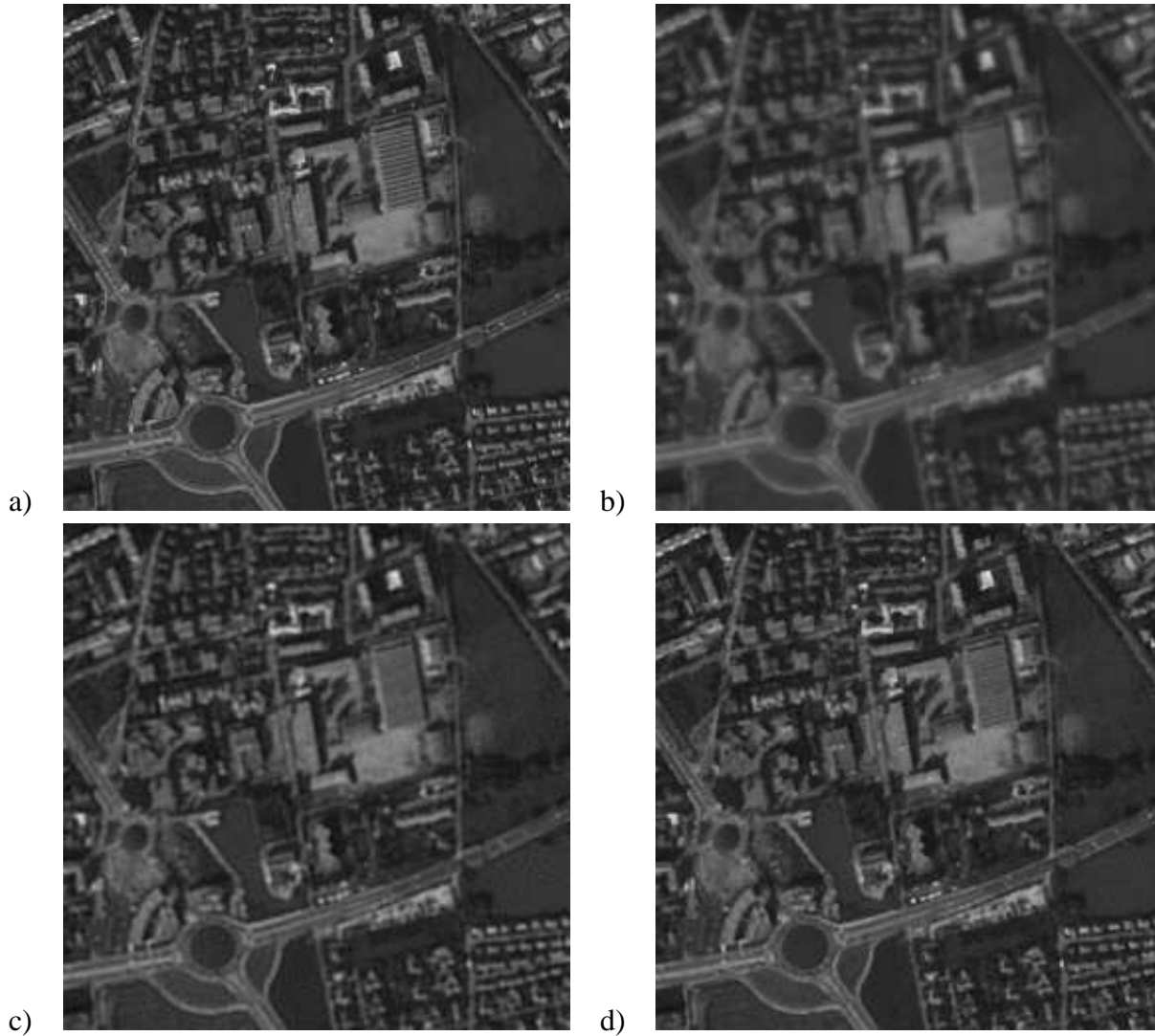


FIG. 2 – a) image originale (256×256) extraite de Nîmes © CNES ; b) image observée (noyau h : voir figure 1 et bruit $\sigma = 1.35$, $SNR=16.6$ dB) ; c) image reconstruite avec une régularisation quadratique ($SNR=20.2$ dB) ; d) image reconstruite avec préservation des contours (fonction non quadratique), paramètres estimés $\hat{\lambda} \simeq 0.25$ et $\delta \simeq 10$ ($SNR=22.1$ dB).

Références

- [1] L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules, et N. Weiss. A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of markov chains. *Ann. Maths. Stats.*, 41:164–171, 1972.
- [2] J. Besag. On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of Royal Statistic Society*, B(68):259–302, 1986.
- [3] B. Chalmond. Image restoration using an estimated Markov model. *Signal Processing*, 15:115–129, 1988.
- [4] P. Charbonnier. *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte de discontinuités*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994.
- [5] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud. Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computed Imaging. *IEEE Trans. on IP*, 6(2):298–311, 1997.
- [6] G. Demoment. Image reconstruction et restauration : overview of common estimation structures and problems. *IEEE Trans. on ASSP*, 37(12):2024–2036, 1989.
- [7] D. Geman et G. Reynolds. Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Trans. on PAMI*, 14(3):367–383, 1992.
- [8] D. Geman et C. Yang. Nonlinear Image Recovery with Half-Quadratic Regularization. *IEEE Trans. on IP*, 4(7):932–946, 1995.
- [9] S. Geman et D. Geman. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Trans. on PAMI*, 6(6):721–741, 1984.
- [10] J. Idier. Problèmes inverses en restauration de signaux et d'images. *Mémoire d'habilitation à diriger les recherches*, 2000.
- [11] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, et J. Zerubia. Estimation d'hyperparamètres pour la restauration d'images satellitaires par une méthode MCMCML. *Rapport de recherche INRIA*, www.inria.fr/RRRT/RR-3469.html, 3469, 1998.
- [12] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, et J. Zerubia. Adaptive parameter estimation for satellite image deconvolution. *INRIA Research Report 3956*, www.inria.fr/RRRT/RR-3956.html, 2000.
- [13] A. Jalobeanu, L. Blanc-Féraud, et J. Zerubia. Satellite image deconvolution using complex wavelet packets. *INRIA Research Report 3955*, www.inria.fr/RRRT/RR-3955.html, 2000.
- [14] R. A. Redner et H. F. Walker. Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. *SIAM Review*, 26(2):195–239, 1984.
- [15] A. N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl.*, 4:1624–1627, 1963.